尤溪一中 2018-2019 学年上学期高二理科导数及其应用综合测试

数学周测（十五）答案解析

一、选择题（本大题共 10 小题， 1-6 题每题 7 分，7-10 题每题 8 分，共 74 分）

1. 【答案】B

【解析】解：$\because f(3)=2$，$f'(x)=-2$，

$\therefore \lim\limits_{x\to 3}\frac{6-3f(x)}{x-3}=-3\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=-3f'(x)=6$，

故选：B.

本题考查导数的定义，考查学生的计算能力，正确变形是关键.

2. 【答案】A

【解析】解：设点 P 的横坐标为x_0，

$\because y=x^2+2x+3$，

$\therefore y'|_{x=x_0}=2x_0+2$，

利用导数的几何意义得$2x_0+2=\tan\alpha$(α为点 P 处切线的倾斜角)，

又$\because \alpha\in[0,\frac{\pi}{4}]$，$\therefore 0\le 2x_0+2\le 1$，

$\therefore x_0\in[-1,-\frac{1}{2}]$.

故选：A.

本小题主要考查利用导数的几何意义求切线斜率问题.

3. 【答案】D

【解析】解：从导函数的图象可知两个函数在x_0处斜率相同，可以排除 B，

再者导函数的函数值反映的是原函数的斜率大小，可明显看出$y=f(x)$的导函数的值在减小，

所以原函数应该斜率慢慢变小，排除 AC，

故选 D.

根据导函数的函数值反映的是原函数的斜率大小可得答案.

4. 【答案】D

【解析】解：由于曲线$y=x^2(x>0)$与$y=\frac{1}{4}$的交点为$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$，

而曲线$y=x^2$和直线$x=0$，$x=1$，$y=\frac{1}{4}$所围成的图形(阴影部分)的面积为$S=\int 0\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-x^2)dx+$

$\int\frac{1}{2}1(x^2-\frac{1}{4})dx$，

所以围成的图形的面积为$S=\int 0\frac{1}{2}(\frac{1}{4}-x^2)dx+\int\frac{1}{2}1(x^2-\frac{1}{4})dx=(\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}x^3)|\,{}^{\frac{1}{2}}_{0}+(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x)|\,{}^{1}_{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$.

故选：D.

本题考查了定积分在研究平面几何中的应用，主要是利用定积分求曲线围成的图形面积，关键是要找到正确的积分区间.

5.

考点 导数公式的应用

题点 导数公式的应用

答案 C

解析 $f'(x)=2f'(1)+2x$，则 $f'(1)=2f'(1)+2$，

$\therefore f'(1)=-2$，

$\therefore f'(x)=-4+2x$，$f'(-1)=-6$，

又 $f(-1)=-2f'(1)+1=5$，$\therefore \dfrac{f'(-1)}{f(-1)}=-\dfrac{6}{5}$.

6.

考点 函数极值的综合应用

题点 函数极值在函数图象上的应用

答案 A

解析 设极值点依次为 x_1，x_2，x_3 且 $a<x_1<x_2<x_3<b$，则 $f(x)$在$(a，x_1)$，$(x_2，x_3)$上单调递增，在$(x_1，x_2)$，$(x_3，b)$上单调递减，因此，x_1，x_3 是极大值点，只有 x_2 是极小值点.

7. 【答案】B

【解析】解：由$f(x)$图象单调性可得$f'(x)$在$(-\infty,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$大于 0，

在$(\frac{1}{2},2)$上小于 0，

$\therefore xf'(x)<0$的解集为$(-\infty,0)\cup(\frac{1}{2},2)$.

故选 B.

函数$y=f(x)(x\in R)$的图象得函数的单调性，根据单调性与导数的关系得导数的符号，得不等式$xf'(x)<0$的解集

考查识图能力，利用导数求函数的单调性是重点.

8.

【答案】A

【解析】解：因为$xf'(x)>f(x)$，所以$\frac{f(x)}{x}=[xf'(x)-f(x)]\frac{1}{x^2}$，

即$F(x)=\frac{f(x)}{x}$在定义域内递增函数，又因$F(2)=\frac{f(2)}{2}=0$，

则不等式$f(x)<0$的解集就是不等式$\frac{f(x)}{x}<0$的解集，

即为$F(x)<F(2)$的解集，

解得$\{x|0<x<2\}$.

故选 A.

通过已知条件，构造分数函数的导数，判断函数的单调性，通过$f(2)=0$，求出不等式的解集即可.

本题考查函数的导数与函数的单调性的应用，考查转化思想与计算能力.

9．**考点**　导数的综合运用

　　题点　导数的综合运用

答案　D

解析　$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$表示两函数图象上任意两点之间的距离，其最小值应为曲线 y_1 上与直线 y_2 平行的切线的切点到直线 y_2 的距离．

∵$y'_1=2\cos 2x_1$，令 $y'_1=1$，

∴$\cos 2x_1=\frac{1}{2}$，∵$x_1\in\left[0，\frac{\pi}{2}\right]$

∴$x_1=\frac{\pi}{6}$，

∴$y_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，故切点坐标为$\left(\frac{\pi}{6}，\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$，切点到直线 y_2 的距离为$\frac{\left|\frac{\pi}{6}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+3\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\pi-3\sqrt{3}+15}{6\sqrt{2}}$，

∴$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ 的最小值为$\frac{(\pi-3\sqrt{3}+15)^2}{72}$.故选 D.

10．【答案】B

【解析】解：$\because f(x)$是定义在 R 上的可导函数，

∴可以令$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，

$\therefore g'(x)=\frac{e^x f\prime(x)-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x[f\prime(x)-f(x)]}{(e^x)^2}$，

$\because f'(x)>f(x)$，$e^x>0$，

$\therefore f'(x)>0$，　$\therefore g(x)$为增函数，

∵正数$a>0$，　$\therefore g(a)>g(0)$，

$\therefore \frac{f(a)}{e^a}>\frac{f(0)}{e^0}=f(0)$，

$\therefore f(a)>e^a f(0)$，　故选：B.

此题主要考查利用导数研究函数单调性，此题要根据已知选项令特殊函数，是一道好题；

二、填空题（本大题共 2 小题，共 10 分）

11．　【答案】$(0,+\infty)$

【解析】【分析】

构造函数$g(x)=e^x f(x)+e^x(x\in R)$，研究$g(x)$的单调性，利用其单调性，求解不等式.

【解答】

解：不等式$e^x f(x)>-e^x+4$，即为$e^x f(x)+e^x>4$.设$g(x)=e^x\cdot f(x)+e^x$，$(x\in R)$，

$g'(x)=e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)+e^x$

则 $g'(x)=e^x((f(x)+f'(x)+1)$，又 $f(x)+f'(x)>-1$ -1 '/>，故 $g'(x)>0$ 0 '/>，$\therefore g(x)$在 R 上为增函数，

又$g(0)=e^0\cdot f(0)+e^0=4$，

由$g(x)>g(0)$，$\therefore x>0$，∴原不等式的解集为$(0,+\infty)$.

12. **考点**　函数极值的综合应用

题点　函数极值在函数图象上的应用

答案　①④

解析　由图象上可以发现，当 $x\in(1，+\infty)$时，$xf'(x)>0$，于是 $f'(x)>0$，故 $f(x)$在区间$(1，+\infty)$上是增函数，故①正确；

当 $x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$在区间$(-1,1)$上是减函数，②错误，③也错误；

当 $0<x<1$ 时，$f(x)$在区间$(0,1)$上是减函数，而在区间$(1，+\infty)$上是增函数，所以函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值，④正确．

三、**解答题（本大题共 1 小题，共 16 分）**

考点　利用导数求函数中参数的取值范围

题点　利用导数求恒成立问题中参数的取值范围

解　(1)当 $a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=x(e^x-1)-\frac{1}{2}x^2$，

$f'(x)=e^x-1+xe^x-x=(e^x-1)(x+1)$．

令 $f'(x)=0$，则 $x=-1$ 或 0，

当 $x\in(-\infty，-1)$时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(0，+\infty)$时，$f'(x)>0$．

故 $f(x)$在$(-\infty，-1)$，$(0，+\infty)$上单调递增，在$(-1,0)$上单调递减．

(2)$f(x)=x(e^x-1-ax)$．

令 $g(x)=e^x-1-ax$，则 $g'(x)=e^x-a$．

若 $a\leqslant 1$，则当 $x\in(0，+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$为增函数，

而 $g(0)=0$，从而当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant 0$，即 $f(x)\geqslant 0$．

若 $a>1$，则当 $x\in(0，\ln a)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$为减函数，而 $g(0)=0$，

从而当 $x\in(0，\ln a)$时，$g(x)<0$，即 $f(x)<0$，不符合题意．

综上，实数 a 的取值范围为$(-\infty，1]$．