

2018-2019 学年上学期第二次月考高三数学 (理) 试卷

答案解析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	C	C	C	A	A	A	B	B	C	C	D

13. $2x + 4y - 5 = 0$

14. 5 或 0

15. $\frac{9}{4}$

16. $\frac{4}{3}$

第 1 题答案 D

第 1 题解析

$$\text{解方程组} \begin{cases} 4x - y - 6 \\ 3x - 2y - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 \\ y - 2 \end{cases}, \text{所以 } M \cap P = \{(1, 2)\}, \text{ 故选 } D.$$

第 2 题答案 C

第 2 题解析

由 $1 - x^2 \neq 0$, 得 $x \neq \pm 1$, 定义域关于原点对称, $f(-x) = \frac{1 + (-x)^2}{1 - (-x)^2} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = f(x)$, $\therefore f(x)$ 是偶函数,

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = f(x), \text{ 故选 } C.$$

第 3 题答案 C

第 3 题解析

$$\sqrt{1 - 2\sin 4 \cos 4} = \sqrt{(\sin 4 - \cos 4)^2} = |\sin 4 - \cos 4|,$$

$$\because \frac{5\pi}{4} < 4 < \frac{6\pi}{4}, \therefore \text{由三角函数线易知 } \cos 4 > \sin 4,$$

$$\therefore \text{原式} = |\sin 4 - \cos 4| = \cos 4 - \sin 4.$$

第 4 题答案 C

第 4 题解析

设 $g(x) = (x - 2)(x - 5)$, $g(x)$ 开口向上, 与 x 轴的交点为 $(2, 0)$, $(5, 0)$, $f(x)$ 相当于把 $g(x)$ 向下平移一个单位, 所以 $x_1 < 2$, $x_2 > 5$, 故选 C.

第 5 题答案 A

第 5 题解析

P 真时有 $a < 1$, Q 真时有 $a > 1$ 或 $a < -2$; P 且 P 为真, $\therefore P$ 真 Q 真. 故 $a < -2$ 或 $a = 1$.

第 6 题答案 A

第 6 题解析

$$\because \overrightarrow{OB} = a_1 \overrightarrow{OA} + a_{200} \overrightarrow{OC}, \text{ 且 } A, B, C \text{ 共线}, \therefore a_1 + a_{200} = 1. \text{ 又 } \because \{a_n\} \text{ 是等差数列},$$

$$\therefore S_{200} = \frac{a_1 + a_{200}}{2} \times 200 = 100.$$

第 7 题答案 A

第 7 题解析

$\because AC \parallel \text{平面 } EFG$, AB 在面 ABC 内, 平面 $EFG \cap \text{平面 } ABC = EF$,

$$\therefore AC \parallel EF, PB \parallel \text{平面 } EFG, \text{ 同理, } PB \parallel FG, \therefore \frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FB} = \frac{CG}{GP} = \frac{1}{2}$$

第8题答案 B

第8题解析

曲线 $C_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的方程可化为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$,即表示圆心为 $(1,0)$ 半径为1的圆,曲线 $C_2: y(y-mx-m)=0$ 的方程可化为 $y=0$ 或 $y=m(x+1)$,即表示 x 轴和过定点 $(-1,0)$ 的直线.依据数形结合,当直线 $y=m(x+1)$ 与圆 C_1 相切时,须满足圆心 $(1,0)$ 到直线 $y=m(x+1)$ 距离等于1,解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,故曲线 C_1 与 C_2 有四个不同的交点时, $-\frac{\sqrt{3}}{3} < m < 0$ 或 $0 < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

第9题答案 B

第9题解析

$\therefore a_1, a_2, \dots, a_8$ 为各项都大于零的等差数列,公差 $d \neq 0$
 $\therefore a_1 a_8 - a_4 a_5 = a_1(a_1 + 7d) - (a_1 + 3d)(a_1 + 4d) = a_1^2 + 7a_1 d - a_1^2 - 7a_1 d - 12d^2 = -12d^2 < 0$
故 $a_1 a_8 < a_4 a_5$.故选 B;

第10题答案 C

第10题解析

由题意得, $\frac{b^2}{a} = 2c, \therefore a^2 - c^2 = 2ac$,即 $c^2 = 2c, \therefore c = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}, \therefore c = -1 - \sqrt{2}$.

第11题答案 C

第11题解析

由题意观察分段函数的图象,知 $f(x)$ 在 R 上是增函数,由题意得 $2 - a^2 > a$,解得 $-2 < a < 1$,故选择 C.

第12题答案 D

第12题解析

$f(x) = \cos^3 x + \sin^2 x - \cos x = \cos^3 x + 1 - \cos^2 x - \cos x$,令 $t = \cos x$,则 $-1 < t < 1$,则函数 $f(x)$ 等价于 $g(t) = t^3 + 1 - t^2 - t, -1 < t < 1$ 函数的导数 $g'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (t-1)(3t+1), -1 < t < 1$ 当 $-\frac{1}{3} \leq t \leq 1$ 时, $g'(t) \leq 0$ 函数单调递减,当 $-1 \leq t \leq -\frac{1}{3}$ 时, $g'(t) \geq 0$ 函数单调递增,则 $t = -\frac{1}{3}$ 函数 $g(t)$ 取得极大值,同时也是最大值 $g(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$,故选 D

第13题答案 $2x + 4y - 5 = 0$

第13题解析

因为 $y = ax^2 + 1$,所以 $y' = 2ax$,所以 $y'|_{x=1} = 2a = -\frac{1}{2}$,所以 $a = -\frac{1}{4}$,则切点为 $(1, \frac{3}{4})$ 利用点斜式方程得到为 $2x + 4y - 5 = 0$.

第14题答案 5或0

第14题解析

当 $m=0$ 时, $mx = (m+2)y+2 = 2y+2=0$,即 $y=1, 3x-my-1=3x-1=0$,即 $x=\frac{1}{3}$,此时两直线垂直,点 $(m,1)$ 到 l 轴的距离为0;当 $m \neq 0$ 时,由题意有 $\frac{m+2}{m} \cdot \frac{m}{3} = -1$,解得 $m=5$,点 $(m,1)$ 到 l 轴的距离为5.

第15题答案 $\frac{9}{4}$

第15题解析

设 $P(x_0, y_0)$ 依题意 $F_1(-4,0), F_2(4,0), PF_1^2 = (-4-x_0)^2 + y_0^2, PF_2^2 = (4-x_0)^2 + y_0^2, \therefore PF_1^2 - PF_2^2 = 0, \therefore PF_1^2 \cdot PF_2^2 = 0$,即 $\begin{cases} (-4-x_0)(4-x_0) + y_0^2 = 0, \\ \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1. \end{cases} \therefore y_0 = \pm \frac{9}{4}$ 点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{9}{4}$.

第16题答案
1
3

第16题解析

方法一、由角平分线的性质,得 $\frac{DB}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, 所以 $AC = 4$.

因为 $4DB^2 = CD^2$, 则由余弦定理, 得

$$4(AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 60^\circ) = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cos 60^\circ,$$

$$\text{即 } 4(4 + AD^2 - 2 \times 2 \times AD \times \frac{1}{2}) = AD^2 + 16 - 2 \times 4 \times AD \times \frac{1}{2}, \text{ 解得 } AD = \frac{4}{3}.$$

方法二、由题意 B, C, D 三点共线, 且 $\frac{CD}{BD} = \frac{2}{1}$.

$$\text{则 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$

根据角平分线的性质 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}$, 所以 $AC = 4$.

$$AD^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 = (\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB})^2 = \frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{16}{9},$$

$$\text{所以 } AD = \frac{4}{3}.$$

第17题答案

(1) 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}] (k \in \mathbb{Z})$;

$$(2) \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = 2.$$

第17题解析

$$(1) f(x) = m^2 \cdot n^2 - 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 1 = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 1,$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

$$\text{令 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}), \therefore k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的单调递减区间为 } [k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}] (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(2) \text{由 } f(A) = 2, \text{ 得 } 2\sin(2A - \frac{\pi}{6}) + 1 = 2, \therefore \sin(2A - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore 0 < A < \pi, \therefore \frac{\pi}{6} < 2A + \frac{\pi}{6} < 2\pi + \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore 2A + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 1 \times c \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore c = 2.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理, 得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3, \therefore a = \sqrt{3}.$$

$$\text{由 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2, \text{ 得 } b = 2\sin B, c = 2\sin C, \therefore \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = 2.$$

第18题答案 (1) $a_n = 4n - 1$, $b_n = 2^{n-1}$; (2) $T_n = 5 \cdot (4n - 5)2^n$

第18题解析

(1) 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 3$;

当 $n > 2$ 时,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - n - 2(n-1)^2 - (n-1) = 4n - 1;$$

$$\therefore a_n = 4 \log_2 b_n + 3, \therefore 4n - 1 = 4 \log_2 b_n + 3,$$

$$\therefore b_n = 2^{n-1}.$$

(2) $\therefore a_n b_n = (4n - 1) \cdot 2^{n-1}$,

$$\therefore T_n = 3 \times 2^0 + 7 \times 2^1 + 11 \times 2^2 + \cdots + (4n - 1) \cdot 2^{n-1};$$

$$2T_n = 3 \times 2^1 + 7 \times 2^2 + \cdots + (4n - 1) \cdot 2^n.$$

两式相减得:

$$-T_n = 3 - 4 \times (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - (4n - 1) \cdot 2^n$$

$$3 - 4 \times \frac{2 \times (1 - 2^{n-1})}{1 - 2} - (4n - 1) \cdot 2^n = -5 - (4n - 5)2^n,$$

$$\text{所以, } T_n = 5 \cdot (4n - 5)2^n.$$

第19题答案 (1) 略; (2) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

第19题解析

(1) 证明: 连结 BD , 交 AC 于点 G , 所以点 G 是 BD 的中点.

因为点 M 是 DF 的中点, 所以 MG 是 $\triangle BDF$ 的中位线, 所以 $BF \parallel MG$.

因为 $MG \subset$ 平面 AMC , $BF \not\subset$ 平面 AMC , 所以 $BF \parallel$ 平面 AMC .

(2) 因为四边形 $ABEF$ 是梯形, $\angle EFA = \angle FAB = 90^\circ$, 所以 $AF \perp AB$.

又四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AB \perp AD$,

又 $AD \cap AF = A$, 所以 $AB \perp$ 面 ADF ,

又 $BC \parallel AD$, 所以 $CD \perp$ 面 ADF , 所以 $CD \perp DF$,

$$\text{在 } Rt\triangle CDM \text{ 中, } DM = \frac{1}{2} DF = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$CM = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ 由 } CD^2 - DM^2 = CM^2, \text{ 可求得 } AB = CD = 2,$$

以 A 为原点, 以 AF, AB, AD 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

所以 $A(0, 0, 0), C(0, 2, 1), E(1, 1, 0), F(1, 0, 0)$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AC} = (0, 2, 1), \overrightarrow{AE} = (1, 1, 0),$$

$$\overrightarrow{AF} = (1, 0, 0),$$

设平面 ACE 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0,$$

$$\text{所以有 } \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 1,$$

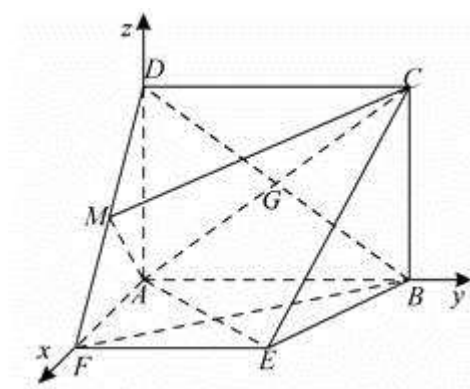
则 $y = -1, z = 2$, 所以 $\vec{n} = (1, -1, 2)$,

又 $\overrightarrow{AF}$ 是平面 ACB 的法向量,

$$\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AF} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AF}|} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

如图所示, 二面角 $B - AC - E$ 为锐角.

$\therefore$ 二面角 $B - AC - E$ 的余弦值是 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.



第 20 题答案 (I) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (II) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

第 20 题解析: (I) 由题设知 $\begin{cases} b = \sqrt{3} \\ \frac{c}{b^2} = \frac{1}{a^2 - c^2} \end{cases}$, 解得 $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$, $\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II) 由题设, 以 $F_1 F_2$ 为直径的圆的方程为 $x^2 + y^2 = 1$, $\therefore$ 圆心到直线的距离 $d = \frac{2|m|}{\sqrt{5}}$, 由 $d < 1$ 得 $|m| < \frac{\sqrt{5}}{2}$. (*)

$\therefore |CD| = 2\sqrt{1 - d^2} = 2\sqrt{1 - \frac{4}{5}m^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{5 - 4m^2}$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$.

由根与系数的关系可得 $x_1 + x_2 = m, x_1 x_2 = m^2 - 3$,

$\therefore |AB| = \sqrt{[1 + (\frac{1}{2})^2][m^2 - 4(m^2 - 3)]} = \frac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{4 - m^2}$.

由 $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ 得 $\sqrt{\frac{4 - m^2}{5 - 4m^2}} = 1$, 解得 $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 满足 (*)

$\therefore$ 直线的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

第 21 题答案 (1) $a = 2$; (2) 略; (3) 略.

第 21 题解析: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - a}{x}$,

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x + 2y - 1 = 0$ 垂直, $\therefore f'(1) = a = 2$.

(2) 由于 $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - a}{x}$, 所以令 $g(x) = 2x^2 - 2x + a$, 则 $\Delta = 4 - 8a$.

① 当 $\Delta < 0$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $g(x) \geq 0$, 从而 $f'(x) \geq 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $\Delta > 0$, 即 $a < \frac{1}{2}$ 时, $g(x) = 0$ 的两个根为 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2} > \frac{1}{2}$,

当 $\sqrt{1 - 2a} \geq 1$, 即 $a \leq 0$ 时, $x_1 \leq 0$, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $x_1 > 0$.

故当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2})$ 单调递减, 在 $(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty)$ 单调递增;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2}), (\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty)$ 单调递增,

在 $(\frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2})$ 单调递减.

(3) 当函数 $f(x)$ 有两个极值点时, $0 < a < \frac{1}{2}, 0 < \sqrt{1 - 2a} < 1$,

故此时 $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$, 且 $g(x_2) = 0$, 即 $a = -2x_2^2 + 2x_2$,

所以 $f(x_2) = (x_2 - 1)^2 + a \ln x_2 = (x_2 - 1)^2 + (-2x_2^2 + 2x_2) \ln x_2$,

设 $h(x) = (x - 1)^2 + (-2x^2 + 2x) \ln x$, 其中 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, 则 $h'(x) = (-4x + 2) \ln x$,

由于 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 是增函数, 故 $h(x) > h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$, 所以 $f(x_2) > \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

第 22 题答案

$$(1) A(4, \frac{\pi}{6}), B(-4, \frac{\pi}{6}) \text{ 或 } B(4, \frac{7\pi}{6});$$

$$(2) 2\sqrt{17}$$

第 22 题解析

$$(1) \text{ 由 } \begin{cases} \rho^2 \cos 2\theta = 8 \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases} \text{ 得: } \rho^2 \cos \frac{\pi}{3} = 8, \therefore \rho^2 = 16, \text{ 即 } \rho = \pm 4,$$

$$\therefore A、B \text{ 两点的极坐标为: } A(4, \frac{\pi}{6}), B(-4, \frac{\pi}{6}) \text{ 或 } B(4, \frac{7\pi}{6});$$

$$(2) \text{ 由曲线 } C_1 \text{ 的极坐标方程得其普通方程为 } x^2 - y^2 = 8, \text{ 将直线 } \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases} \text{ 代入 } x^2 - y^2 = 8, \text{ 整理得}$$

$$t^2 + 2\sqrt{3}t - 14 = 0,$$

$$t_1 + t_2 = -2\sqrt{3}, t_1 t_2 = -14, \text{ 所以 } |MN| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \times (-14)} = 2\sqrt{17}.$$