

## 2018-2019 学年上学期第二次月考高三数学 (理) 试卷

时间:120 分钟 满分:150 分 命卷人:陈鹏 审核人:高三理科数学备课组

### 一、选择题 (每小题 5 分, 共 12 小题 60 分)

1. 已知集合  $M = \{(x, y) | 4x + y = 6\}$ ,  $P = \{(x, y) | 3x + 2y = 7\}$ , 则  $M \cap P$  等于 ( )  
 A.  $\{1, 2\}$  B.  $\{1\} \cup \{2\}$  C.  $\{1, 2\}$  D.  $\{(1, 2)\}$

2. 已知函数  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  则有 ( )

- A.  $f(x)$  是奇函数, 且  $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$  B.  $f(x)$  是奇函数, 且  $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$   
 C.  $f(x)$  是偶函数, 且  $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$  D.  $f(x)$  是偶函数, 且  $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

3. 化简  $\sqrt{1 - 2\sin 4 \cos 4}$  的结果是 ( )

- A.  $\sin 4 - \cos 4$  B.  $\sin 4 + \cos 4$  C.  $\cos 4 - \sin 4$  D.  $-\sin 4 - \cos 4$

4. 函数  $f(x) = (x-2)(x-5) - 1$  有两个零点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则 ( )

- A.  $x_1 < 2, 2 < x_2 < 5$  B.  $x_1 > 2$  且  $x_2 > 5$   
 C.  $x_1 < 2, x_2 > 5$  D.  $2 < x_1 < 5, x_2 > 5$

5. 已知  $P$ : “对任意  $x \in [1, 2]$ , 使  $x^2 - a > 0$ ”, 命题  $Q$ : “存在  $x \in R$ , 使  $x^2 + 2ax + 2 - a = 0$ ”, 若命题 “ $P$ 且 $Q$ ” 是真命题, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 2] \cup \{1\}$  B.  $(-\infty, 2] \cup [1, 2]$  C.  $[1, +\infty)$  D.  $[-2, 1]$

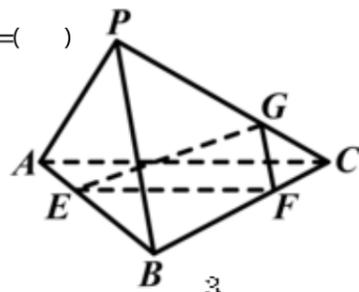
6. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $\vec{OB} = a_1 \vec{OA} + a_{200} \vec{OC}$ , 且  $A, B, C$  三点共线 (该直线不过点  $O$ ),

则  $S_{200}$  等于 ( )

- A. 100 B. 101 C. 200 D. 201

7. 如图,  $P$  是  $\triangle ABC$  所在平面外一点,  $E, F, G$  分别在  $AB, BC, PC$  上, 且  $PG = 2GC, AC \parallel$  平面

$EFG, PB \parallel$  平面  $EFG$ , 则  $\frac{AF}{FB} =$  ( )



- A.  $\frac{1}{2}$  B. 1 C.  $\frac{3}{2}$  D. 2

8. 若曲线  $C_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$  与曲线  $C_2: y(y - mx - m) = 0$  有四个不同的交点, 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$  B.  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$   
 C.  $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$  D.  $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

9. 如果  $a_1, a_2, \dots, a_8$  为各项都大于零的等差数列, 公差  $d \neq 0$ , 则 ( )

- A.  $a_1 a_8 > a_4 a_5$  B.  $a_1 a_8 < a_4 a_5$  C.  $a_1 a_8 = a_4 a_5$  D. 无法判断大小

10. 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点为  $F_1, F_2$ , 过  $F_1$  作直线交  $C$  于  $A, B$  两点, 若  $\triangle ABF_2$  是等腰直角三角形, 且  $\angle AF_2 B = 90^\circ$ , 则椭圆  $C$  的离心率为 ( )

- A.  $2 - \sqrt{2}$  B.  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$  C.  $\sqrt{2} - 1$  D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & (x \geq 0) \\ 4x - x^2, & (x < 0) \end{cases}$  若  $f(2 - a^2) > f(a)$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$  B.  $(-1, 2)$   
 C.  $(-2, 1)$  D.  $(-\infty, 2) \cup (1, +\infty)$

12. 函数  $f(x) = \cos^3 x - \sin^2 x - \cos x$  在  $[0, 2\pi]$  上的最大值为 ( )

- A.  $\frac{4}{27}$  B.  $\frac{8}{27}$  C.  $\frac{16}{27}$  D.  $\frac{32}{27}$

### 二、填空题 (每小题 5 分, 共 4 小题 20 分)

13. 设函数  $y = ax^2 + 1$ , 该曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线平行于直线  $x + 2y + 1 = 0$ , 则该曲线的切线方程 \_\_\_\_\_.

14. 若直线  $mx - (m+2)y + 2 = 0$  与  $3x - my - 1 = 0$  互相垂直, 则点  $(m, 1)$  到  $y$  轴的距离为 \_\_\_\_\_.

15. 已知椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  在椭圆上, 若  $PF_1 \perp PF_2$ , 则点  $P$  到  $x$  轴的距离为 \_\_\_\_\_.

16.  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 120^\circ$ ,  $\angle A$  的平分线  $AD$  交边  $BC$  于  $D$ , 且  $AB + 2CD = 2DB$ , 则  $AD$  的长为 \_\_\_\_\_.

三、解答题(第17题12分,第18题12分,第19题12分,第20题12分,第21题12分,第22题10分,共6小题70分)

17. 设函数  $f(x) = m \cdot n$ , 其中向量  $m = (2 \cos x, 1)$ ,  $n = (\cos x, \sqrt{3} \sin 2x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

(1) 求  $f(x)$  的最小正周期与单调递减区间;

(2) 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是角  $A, B, C$  的对边, 已知  $f(A) = 2, b = 1, \triangle ABC$  的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

求  $\frac{b+c}{\sin B + \sin C}$  的值.

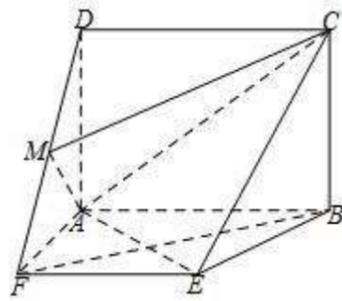
18. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n = 2n^2 + n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 数列  $\{b_n\}$  满足

$$a_n = 4 \log_2 b_n + 3 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

(1) 求  $a_n, b_n$ ;

(2) 求数列  $\{a_n \cdot b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

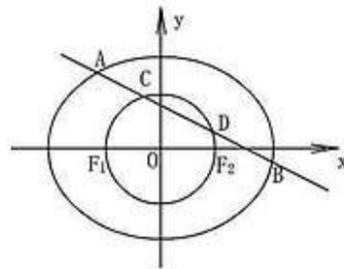
19. 如图, 四边形  $ABCD$  是矩形,  $BC \perp$  平面  $ABEF$ , 四边形  $ABEF$  是梯形,  $\angle EFA = \angle FAB = 90^\circ$ ,  $EF = FA = AD = 1$ , 点  $M$  是  $DF$  的中点,  $CM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .



(1) 求证:  $BF \parallel$  平面  $AMC$ ;

(2) 求二面角  $B-AC-E$  的余弦值.

20. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 经过点  $(0, \sqrt{3})$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ , 左右焦点分别为  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ .



(I) 求椭圆的方程;

(II) 若直线  $l: y = -\frac{1}{2}x + m$  与椭圆交于  $A, B$  两点, 与以  $F_1 F_2$  为直径的圆交于  $C, D$  两点, 且满足

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{5\sqrt{3}}{4},$$

求直线  $l$  的方程

21. 设函数  $f(x) = (x-1)^2 + a \ln x, a \in \mathbb{R}$ .

(1) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与直线  $x + 2y - 1 = 0$  垂直, 求  $a$  的值;

(2) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(3) 若函数  $f(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 求证:  $f(x_2) > \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ .

22. 已知曲线  $C_1$  的极坐标方程为  $\rho^2 \cos 2\theta = 8$ , 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{6}$ , 曲线  $C_1, C_2$  相交于  $A, B$  两点.

( $\rho \in \mathbb{R}$ )

(1) 求  $A, B$  两点的极坐标;

(2) 曲线  $C_1$  与直线  $\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 分别相交于  $M, N$  两点, 求线段  $MN$  的长度.