

尤溪一中 2018-2019 学年上学期高二文科数学周测（八）答案解析

第 1 题答案 D

第 1 题解析

空间中不共线的三点确定一个平面故 A 错；

正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中四边形 $ABCD_1$ 有三角是直角但不是矩形故 B 错；

由正方体共点的三棱可知 C 错；

空间四边形连接各边中点所得的四边形是平行四边形，故其对角线共面，D 正确.

第 2 题答案 A

第 2 题解析

点 P 的轨迹是以 A 、 B 为焦点的椭圆 $\Rightarrow |PA| + |PB|$ 是定值； $|PA| + |PB| = |AB|$ 时不能推出点 P 的轨迹是以 A 、 B 为焦点的椭圆.

第 3 题答案 A

第 3 题解析

对于命题 p ：当 $x < 0$ ，如 $x = -1$ ，则 $x + \frac{1}{x} = -2 < 2$ ，所以命题 p 是真命题，则 $\neg p$ 是假命题，对于 q ， $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ ，所

以不等式 $x^2 + x + 1 > 0$ 解集为 R ，所以命题 q 是真命题，命题 $\neg q$ 是假命题，所以 $p \cap q$ 为真命题，选 A.

第 4 题答案 C

第 4 题解析

由椭圆定义可知 P 的轨迹为 $c = 1, a = 4$ 的椭圆，故 $|PA|$ 的范围是 $[a - c, a + c]$ 即 $[3, 5]$.

第 5 题答案 C

第 5 题解析

设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， $A(-c, y_0) (y_0 > 0)$ ，因为 $\triangle ABF_2$ 是等腰直角三角形，所以 $\triangle AF_1F_2$ 也是等腰直角

三角形，因为 $A(-c, y_0) (y_0 > 0)$ ，解得 $y_0 = \frac{b^2}{a}$ ，所以 $\frac{b^2}{a} = 2c$ ，即 $a^2 - c^2 = 2ac \Rightarrow 1 - e^2 = 2e$ ，解得 $e = -\sqrt{2} - 1$ (舍去) 或 $e = \sqrt{2} - 1$ ，选 C.

第 6 题答案 C

第 6 题解析

由题意可知 $\frac{p}{2} = 2$ ， $\therefore p = 4$ ， $\therefore$ 抛物线的准线方程为 $x = -2$ ，即点 $(1, y_0)$ 到焦点的距离为 $1 - (-2) = 3$.

第 7 题答案 B

第 7 题解析

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 1}{x^2}, \therefore \begin{cases} 0 \leq k - 1 < k + 1 \\ k - 1 < \frac{1}{2} \\ k + 1 > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 \leq k < \frac{3}{2}.$$

第 8 题答案 C

第 8 题解析

画图可以看到 $|MN|$ 就是两条曲线间的垂直距离，设 $F(x) = f(x) - g(x) = x^3 - \ln x$ ，求解导数可知

$$F'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} = \frac{3x^3 - 1}{x},$$

令 $F'(x) > 0$ ，得 $x > \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ ，令 $F'(x) < 0$ ，得 $0 < x < \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ ，所以 $x = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ 时函数取得最小值，且为 $F(\frac{\sqrt[3]{9}}{3}) = \frac{1 + \ln 3}{3}$ ，故选 C.

第9题答案

$$a > 6 \text{ 或 } a < -3$$

第9题解析

P真： $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a + 6$ 有两个不同的实数根，所以 $\Delta = (2a)^2 - 3 \times 4 \times (a + 6) > 0$ ，解之得

$a > 6$ 或 $a < -3$ 。由于抛物线 $y = 4x^2$ 的焦点坐标为 $(0, \frac{1}{16})$ ，所以 q 为假。由 p 或 q 为真命题，p 且 q 为假命题知 p 真 q 假。故

$$a > 6 \text{ 或 } a < -3.$$

第10题答案

1

第10题解析

依题意， $c^2 = a^2 - b^2 = m^2 + n^2$ ，它们的公共点在 x 轴上的射影为其中一个焦点，

$$\text{则 } \frac{b^2}{a} = \frac{n^2}{m}, \text{ 得 } \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{c^2 - m^2}{m},$$

$$\text{平方得 } (a^4 - 2a^2c^2 + c^4)m^2 = (c^4 - 2c^2m^2 + m^4)a^2,$$

$$\text{整理得 } a^2m^2 = c^4, \text{ 则 } e_1^2e_2^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{c^2}{m^2} = \frac{c^4}{a^2m^2} = 1,$$

即 $e_1 \cdot e_2 = 1$ ，故本题正确答案为 1.

第11题答案

$$(1) \frac{2\sqrt{14}}{3}; (2) (\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

第11题解析

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时，双曲线 C 的方程为 $4x^2 - y^2 = 1$.

$$\text{联立 } \begin{cases} x + y = 1, \\ 4x^2 - y^2 = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } 3x^2 + 2x - 2 = 0.$$

设两交点为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}, x_1x_2 = -\frac{2}{3}$,

$$\text{于是 } |AB| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{28}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{3}.$$

(2) 将 $y = -x + 1$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 中得 $(1 - a^2)x^2 + 2a^2x - 2a^2 = 0$,

$$\therefore \begin{cases} 1 - a^2 \neq 0, \\ 4a^4 + 8a^2(1 - a^2) > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < a < \sqrt{2} \text{ 且 } a \neq 1.$$

$$\text{又双曲线的离心率 } e = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1},$$

$$\therefore e > \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 且 } e \neq \sqrt{2}, \text{ 即离心率 } e \text{ 的取值范围是 } (\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

第12题答案

(1) -1 ;(2) $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -\frac{1}{3})$ 和 $(1, +\infty)$; $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\frac{1}{3}, 1)$.(3) $[11, +\infty)$

第12题解析

(1)由 $f(x) = x^3 + ax^2 - x + c$, 得 $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 1$ 当 $x = \frac{2}{3}$ 时, 得

$$a = f'(\frac{2}{3}) = 3 \times (\frac{2}{3})^2 + 2a \times \frac{2}{3} - 1, \text{解之, 得 } a = -1.$$

(2)由(1)可知 $f(x) = x^3 + ax^2 - x + c$, 则 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 3(x + \frac{1}{3})(x - 1)$, 列表如下:

x	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -\frac{1}{3})$ 和 $(1, +\infty)$; $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\frac{1}{3}, 1)$.(3)函数 $g(x) = (f(x) - x^3) \cdot e^x = (-x^2 - x + c) \cdot e^x$, 有 $g'(x) = (-2x - 1)e^x + (-x^2 - x + c)e^x = (-x^2 - 3x + c - 1)e^x$, 因为函数 $g(x)$ 在 $x \in [-3, 2]$ 上单调递增, 所以 $h(x) = -x^2 - 3x + c - 1 \geq 0$ 在 $x \in [-3, 2]$ 上恒成立. 只要 $h(2) \geq 0$, 解得 $c \geq 11$, 所以 c 的取值范围是 $[11, +\infty)$.

第13题答案

(1) 单调递增区间是 $(0, 2)$, 单调递减区间是 $(2, +\infty)$;

$$(2) f(x)_{\max} = \begin{cases} 2 \ln 2 - 2, a = 0 \\ 2 \ln 2 - 2a - 2, 0 < a \leq \frac{1}{2} \\ -2 - \frac{1}{2a} - 2 \ln a, a > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

第13题解析

(1) $a = 0$ 时, $f(x) = 2 \ln x - x$, $f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x} (x > 0)$,在区间 $(0, 2)$ 上 $f'(x) > 0$; 在区间 $(2, +\infty)$ 上 $f'(x) < 0$,故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, 2)$, 单调递减区间是 $(2, +\infty)$.

$$(2) f'(x) = ax - (2a + 1) + \frac{2}{x} (x > 0), f'(x) = \frac{(ax - 1)(x - 2)}{x} (x > 0),$$

①当 $a = 0$ 时, 由(1)知 $f(x)$ 在 $(0, 2]$ 上单调递增, 故在 $(0, 2]$ 上 $f(x)_{\max} = f(2) = 2 \ln 2 - 2$,②当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{a} \geq 2$, 在区间 $(0, 2)$ 上, $f'(x) > 0$; 故 $f(x)$ 在 $(0, 2]$ 上单调递增, 故在 $(0, 2]$ 上

$$f(x)_{\max} = f(2) = 2 \ln 2 - 2a - 2,$$

③当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $0 < \frac{1}{a} < 2$, 在区间 $(0, \frac{1}{a})$ 上, $f'(x) > 0$; 在区间 $(\frac{1}{a}, 2)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a}]$ 上单调递增,在 $[\frac{1}{a}, 2)$ 上单调递减, 故在 $(0, 2]$ 上 $f(x)_{\max} = f(\frac{1}{a}) = -2 - \frac{1}{2a} - 2 \ln a$.

$$\text{综上, } f(x)_{\max} = \begin{cases} 2 \ln 2 - 2, a = 0 \\ 2 \ln 2 - 2a - 2, 0 < a \leq \frac{1}{2} \\ -2 - \frac{1}{2a} - 2 \ln a, a > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

